

Title	A Remark on Critical Points of Link Cobordism
Author(s)	中西, 康剛
Citation	数理解析研究所講究録 (1985), 542: 67-71
Issue Date	1985-01
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/98771">http://hdl.handle.net/2433/98771</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## A Remark on Critical Points of Link Cobordism

神大 中西康剛 (Yasutaka Nakanishi)

$R^3 \times [0, 1]$  に proper に埋められたコンパクトな有向 P. L. 曲面  $F$  を考える。  $F$  は elementary critical points のみ有する曲面に ambient isotopic である。 ([3], I.) そこで, elementary critical points のみを  $F$  は有すると仮定し, その個数を  $c(F)$  で表わす。

この  $c(F)$  を 絡み輪  $(L_i, R^3) = (F \cap R^3 \times \{i\}, R^3 \times \{i\})$  ( $i = 0, 1$ ) の代数的不変量で評価することが 本稿の目的である。

有向絡み輪  $(L, R^3)$  に対し,  $L$  のどの meridian も  $\sigma$  にうつす 絡み輪群  $\pi_1(R^3 - L)$  から  $\sigma$  で生成される無限巡回群  $\langle \sigma \rangle$  への準同型に対応する  $R^3 - L$  の無限巡回被覆空間  $\tilde{E}$  をとる。すると 1次元ホモロジー群  $H_1(\tilde{E}; \mathbb{Z})$  は, 有限生成  $\mathbb{Z}\langle \sigma \rangle$ -加群であり,  $\mathbb{Z}\langle \sigma \rangle$ -加群としての正方表現行列を有する。そこで このような正方表現行列の次数の最小数を  $m(L)$  で表わす。 ([2].) 但し,  $H_1(\tilde{E}; \mathbb{Z})$  が自明の時は、

$m(L) = 0$  とする。

定理.  $c(F) \geq |m(L_0) - m(L_1)|.$

証明.  $F$  が minimal points や maximal points を有するとき、図1のように piping により、saddle points だけを有する曲面  $F'$  で  $c(F') = c(F)$  であるものが  $R^3 \times [0, 1]$  にとれる。故に saddle points のみ  $F$  が有するとしてよい。

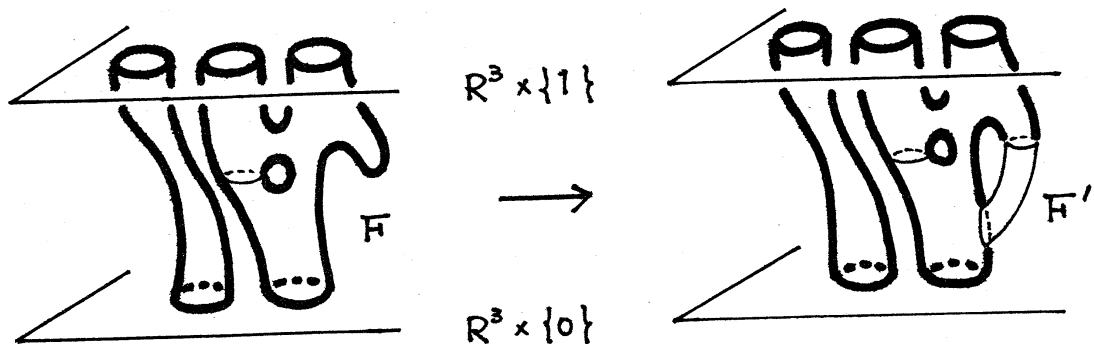


図 1

更に saddle points の levels はすべて異なるとしてよい。つまり、 $k = c(F)$  とおくと  $(k+1)$  個の数を  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = 1$  ととることにより  $F$  の saddle points が  $R^3 \times (t_i, t_{i+1})$  に 各々 1 個ずつあるとしてよい。ここで、 $(F \cap R^3 \times \{t_i\}, R^3 \times \{t_i\})$  を  $(L_{t_i}, R^3)$  で表わすことにすると 次の三角不等式から、 $F$  が唯 1 個の

saddle point を有する場合に示せば十分であるとわかる。

$$|m(L_0) - m(L_1)| \leq |m(L_{t_0}) - m(L_{t_1})| + |m(L_{t_1}) - m(L_{t_2})| + \cdots + |m(L_{t_{k-1}}) - m(L_{t_k})|.$$

さて  $F$  が唯一個の saddle point のみを有し、つまり、 $L_1$  が  $L_0$  から唯一回 fusion すると得られるとする。この fusion を実現する band を  $\beta_0$  とし、 $L_0$  の連結 Seifert 曲面を  $S_0$  とする。

$\beta_0 \cap S_0$  を  $\beta_0$  に沿、た piping により、柳川 [6] の方法で消去することにより、 $L_1$  の連結 Seifert 曲面  $S_1$  が得られる。

さて、 $H_1(S_1 - \beta_0)$  の自由アーベル群としての basis を表現する simple loops  $\{a_i\}$  及び  $\beta_0$  を1度だけ通過する simple loop  $b_0$  を、 $\{a_i\} \cup b_0$  が  $H_1(S_1)$  の自由アーベル群としての basis を表現するようにとる。すると、 $L_1$  の Seifert 行列は、

$$\left| \begin{array}{c|c} lk(a_i, a_j^+) & lk(a_i, b_0^+) \\ \hline lk(b_0, a_j^+) & lk(b_0, b_0^+) \end{array} \right|_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{で得られ、} H_1(\tilde{E}(L_1); \mathbb{Z}) \text{ は}$$

$$\left| \begin{array}{c|c} lk(a_i, a_j^+) - t lk(a_j, a_i^+) & lk(a_i, b_0^+) - t lk(b_0, a_i^+) \\ \hline lk(b_0, a_j^+) - t lk(a_j, b_0^+) & lk(b_0, b_0^+) - t lk(b_0, b_0^+) \end{array} \right|_{1 \leq i, j \leq n}$$

を  $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -正方表現行列にもつ。

ここで、小行列  $|lk(a_i, a_j^+)|_{1 \leq i, j \leq n}$  は  $L_0$  の Seifert 行列でもあるので、小行列  $|lk(a_i, a_j^+) - t lk(a_j, a_i^+)|_{1 \leq i, j \leq n}$  は、 $H_1(\tilde{E}(L_0); \mathbb{Z})$  の  $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -正方表現行列であり、これは定義により、次数  $m(L_0)$  の正方行列に可約である。故に 先にあげた

$H_1(\widehat{E}(L_1); \mathbb{Z})$  の  $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ - 正方表現行列は, 次数  $m(L_0) + 1$  までには少なくとも可約である。故に  $m(L_1) \leq m(L_0) + 1$  を得る。

逆も,  $L_0$  が  $L_1$  から唯 1 回 fission すると得られることから, 同様に議論ができ,  $m(L_0) \leq m(L_1) + 1$  が得られる。

以上から,  $|m(L_0) - m(L_1)| \leq 1$  が得られる。

これにより, 証明が完了した。

付記. 上の定理の系として, [4], [5], [1] の結び目の bordism の critical points の個数の評価が得られる。つまり,  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$  に proper に埋められたコンパクトな有向 P.L. 曲面  $F$  及び結び目  $(K, \mathbb{R}^3) = (F \cap \mathbb{R}^3 \times \{0\}, \mathbb{R}^3 \times \{0\})$  について,  $c(F) \geq m(K) + 1$  であり, ここで,  $K$  が絡み輪であつても良いことがわかる。

$F$  のコンパクト性から 十分大なる数  $t$  をとれば,  $F$  は  $\mathbb{R}^3 \times [0, t)$  にある。ここで,  $\mathbb{R}^3 \times \{t\}$  に trivial knot をとり,  $F$  の maximal points のひとつと piping で結ぶことにより, 新たに link cobordism  $F'$  が得られる。定理より,  $c(F') \geq |m(L) - m(\text{a trivial knot})|$  であり,  $m(\text{a trivial knot}) = 0$ ,  $c(F) - 1 = c(F')$  であることから,  $c(F) \geq m(L) + 1$  が得られる。

最後に, 最近に河内 [2] が得た link bordism のより精緻

な評価を報告しておく。

$R^3 \times [0, \infty)$  に proper に埋められたコンパクトな有向 P. L. 曲面  $F$  及び 絡み輪  $(L, R^3) = (F \cap R^3 \times \{0\}, R^3 \times \{0\})$  について,  $c(F) - 2C_0(F) \geq m(L) + 1$  である。ここで,  $C_0(F)$  は  $F$  の minimal points の個数を表わす。

#### References

- (1) Hosokawa, F., Kawauchi, A., Nakanishi, Y., Sakuma, M.: Note on critical points of surface in 4-space. Kobe J. Math., (to appear).
- (2) Kawauchi, A.: On critical points of proper surfaces in the upper half-space. (to appear).
- (3) Kawauchi, A., Shibuya, T., Suzuki, S.: Descriptions on surfaces in four-space, I. Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 10, 75-125 (1982); *ibid.*, II. *ibid.* 11, 31-69 (1983).
- (4) Nakanishi, Y., Nakagawa, Y.: On ribbon knots. Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 10, 423-430 (1982).
- (5) Saito, M.: Minimal number of saddle points of proper embedded surfaces in the 4-ball. Kobe J. Math. (to Appear).
- (6) Yanagawa, T.: On ribbon 2-knots; the 3-manifolds bounded by the 2-knots. Osaka J. Math. 6, 447-464 (1969). *ibid.* II; the second homotopy group of the complementary domain. Osaka J. Math. 6, 465-473 (1969).